Лекция 5
Толық ықтималдықтар формуласы және Байес формулалары.

Біз бұл параграфта оқиғалардың ықтималдықтарын есептеуді көптеген жағдайларда жеңілдетуге мүмкіндік беретін толық ықтималдықтар формуласы деп аталатын формуланы қорытамыз және оның қолдануларының бірнеше мысалдарын келтіреміз. Параграф соңында гипотезалардың ықтималдықтарын қосымша ақпаратты пайдаланып қалай қайта бағалауға болатыны жөнінде айтамыз.

Толық ықтималдықтар формуласы.

Тұжырым. Айталық, A - қандай да бір оқиға болсын, ал $H_1, H_2, \ldots$ оқиғалары екеуара үйлеспейтін ($H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$), оң ықтималдықты $\left(\mathrm{P}\left(H_i\right) > 0\right)$ және $\sum_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$ шартын қанағаттандыратын оқиғалар болсын. Онда A оқиғасының ықтималдығын *толық ықтималдықтар формуласы* деп аталатын мына төмендегі формула арқылы есептеуге болады:

$$\mathrm{P}\left(A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A / H_i) \qquad (1)$$

Дәлелдеу. Тұжырым шартынан $A = \sum_{i=1}^{\infty}\left(AH_i\right)$ болатындығы шығады. Оның үстіне $AH_1, AH_2, \ldots$ оқиғалары екеуара үйлеспейтін оқиғалар, сондықтан ықтималдықтың саналымды аддитивтілік қасиеті және ықтималдықтарды көбейту формуласы бойынша

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A / H_i) \quad \blacklozenge$$

Толық ықтималдықтар формуласының маңыздылығы мынада: көп жағдайларда әдетте $P(A)$ ықтималдығын тікелей есептегеннен гөрі $P(A / H_i)$ шартты ықтималдықтарын және $P(H_i)$ ықтималдықтарын есептеу әлде қайда жеңіл болуы мүмкін .

Мысалдар.

1) Бірінші құтыда n_1 ақ, m_1 қара шар, екінші құтыда n_2 ақ, m_2 қара шар бар. Бірінші құтыдан кездейсоқ түрде бір шарды алып, екінші құтыға салған. Сосын екінші құтыдан кездейсоқ тЇрде бір шар алынған. Осы соңғы шардың ақ шар болу (A оқиғасы) ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. H_1 және H_2 арқылы бірінші құтыдан екінші құтыға сәйкес *ақ* және *қара* шар салынды дегенді білдіретін оқиғаларды белгілелік. Онда

$$P(H_1) = \frac{n_1}{n_1 + m_1} \quad , \quad P(H_2) = \frac{m_1}{n_1 + m_1}$$

$$P(A/H_1)=\frac{n_2+1}{n_2+m_2+1}\ ,\quad P(A/H_2)=\frac{n_2}{n_2+m_2+1}$$

болғандықтан (1) формула бойынша екінші құтыдан ақ шар алу ықтималдығы

$$P(A)=\frac{n_1(n_2+1)}{(n_1+m_1)(n_2+m_2+1)}+\frac{m_1n_2}{(n_1+m_1)(n_2+m_2+1)} \qquad (2)$$

2) К-пшілікке (мамандарға) кеңінен танымал мына есепті қарастыралық. Айталық, әрқайсысының ішінде N шары бар $N+1$ құты бар болсын және де нөмірі k -ші құтыда k қызыл және $N-k$ ақ шар $\left(k=0,1,2,\dots N\right)$ бар болсын. Кездейсоқ түрде таңдап алынған құтыдан n рет қатарынан бір-бірден n шар қайтарымсыз түрде кездейсоқ алынған (әр жолы алынған шар келесі шарды алар алдында құтыға кері қайтарылып отырған). Барлық алынған шарлар қызыл түсті шарлар (A оқиғасы) болып шықты деп ұйғаралық. Айтылған шарттар орындалған жағдайда келесі шардың да қызыл шар болуының (B оқиғасы) ықтималдығын табалық.

Шешуі. H_k арқылы бастапқыда k-ші нөмірлі құты таңдап алынды дегенді білдіретін оқиғаны белгілелік $\left(k=0,1,2,\dots N\right)$

Онда

$$P(H_k)=\frac{1}{N+1},\ P(A/H_k)=\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

сондықтан ықтималдықтарды қосу формуласы бойынша

$$P(A)=\frac{1}{(N+1)N^n}\left(\sum_{k=0}^{N}k^n\right)$$

AB оқиғасы $n+1$ рет алынған шарлардың барлығы да қызыл шарлар болып шықты дегенді білдіреді. Демек жоғарыдағы формулада n-ді $n+1$-ге ауыстырсақ AB оқиғасының ықтималдығын аламыз:

$$P(AB)=\frac{1}{(N+1)N^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{N}k^{n+1}\right)$$

Іздеп отырған ықтималдық

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Біз жеткілікті үлкен N -дер үшін жуықтап мынаны жаза аламыз

$$\sum_{k=0}^{N}k^n\approx\int_0^N x^n\,dx=\frac{N^{n+1}}{n+1}$$

Бұдан

$$P(A)=\frac{N}{N+1}\cdot\frac{1}{n+1}\approx\frac{1}{n+1},\quad P(AB)=\frac{N}{N+1}\cdot\frac{1}{n+2}\approx\frac{1}{n+2}$$

Ендеше жеткілікті үлкен N үшін :

$$P(B/A) \approx \frac{n+1}{n+2}$$

Бұл нәтижені былайша түсіндіруге болады: егер құтыдағы шарлардың құрамының мүмкін болатын барлық варианттары (нұсқалары) тең ықтималдықты болатын болса және алғашқы n сынақта қатарынан қызыл шарлар алынған болса, онда келесі $n+1$-ші сынақта да қызыл шар алыну ықтималдығы $\frac{n+1}{n+2}$ тең. Бұл *Лапластың ілесу заңы* деп аталатын заң.

3) Емтихан билеттерінің (немесе тест сұрақтарының) саны n болсын, ал студент A алдын-ала соның тек m билетіне (сұрағына) дайындалып үлгерген болсын (әрине, $m \le n$) Егер білетін билетін алған болса, студент емтиханды сәтті тапсырады деп есептелік. Студенттер емтиханға бір-бірлеп кезекпен кіретін болса, онда емтиханды ең жоғары ықтималдықпен сәтті тапсыру үшін A-ның стратегиясы қандай болу керек: оған емтиханға ең алдымен кіргені тиімді ме, немесе орта шенінде, немесе ең соңында кіргені тиімді ме?

Шешуі. Бұл есептің қарапайым жағдайын (бірінші немесе екінші болып кіру жағдайын) біз бірінші параграфтың 3-мысалында қарастырғанбыз. Енді жалпы жағдай үшін де сол мысалдағы идеяны пайдаланалық. Айталық A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ арқылы студент i-ші болып емтиханға кірген және де "бақытты" билет (білетін билетін) алған деген оқиғаны белгілелік. Онда A-ның алдында кірген студенттер j- "бақытты" билеттерді $\left(j = 0,1,2,\ldots,i-1\right)$ алып кеткен болуы мүмкін ($H_j^{(i)}$ оқиғасы) Енді $P(A_i)$ ықтималдықтарын есептеу үшін (1) формуланы пайдалануымызға болады ($P(A_1) = P(A_2) = \frac{m}{n}$ болатыны, жоғарыда айтқанымыздай , алдыңғы параграфта көрсетілген):

$$P(A_i) = \sum_{j=0}^{i-1} P\left(H_j^{(i)}\right) P\left(A_i / H_j^{(i)}\right)$$

Егер алғашқы $i-1$ студенттің ішінен j студент "бақытты" билет алған болса, онда i-ші болып кірген студенттің "бақытты" билет алу ықтималдығы $\frac{m-j}{n-i+1}$ тең, себебі бұл жағдайда барлық қалған билеттер саны $n-(i-1) = n-i+1$, ал оның ішіндегі "бақытты" билеттер саны $m-j$. Сонымен

$$\mathrm{P}\left(A_i / H_j^{(i)}\right) = \frac{m-j}{n-i+1}.$$

Сол сияқты бастапқы кірген $i-1$ студенттің ішінен дәл j студент "бақытты" билет алуының ($H_j^{(i)}$ оқиғасы) ықтималдығы

$$P\left(H_j^{(i)}\right) = C_{i-1}^{j} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)(n-m)(n-m-1)\ldots(n-m-i+j)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}$$

мұндағы C_{i-1}^{j} коэффициенті “бақытты” билет Їшін $i-1$ орыннан j орын таңдап алу әдістерінің саны, ал қалған көбейтінділер m “бақытты” билеттің ішінен j “бақытты” билетті, ал қалған $i-1-j$ билетті қалған $n-m$ билеттің ішінен алу ықтималдығына сәйкес келеді.
Сонымен

$$P(A_i) = \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^{j} \cdot \frac{(m)_j (n-m)_{i-j-1}}{(n)_{i-1}} \cdot \frac{m-j}{n-i+1} \qquad (3)$$

Енді $(N)_n = N(N-1)\ldots(N-n+1)$, $\frac{(N)_n}{N!} = C_N^n$ қатынастарын ескеріп жоғарыдағы ықтималдықты былай жаза аламыз

$$P(A_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{C_m^j C_{n-m}^{i-1-j}}{C_n^{i-1}} \cdot \frac{m-j}{n-i+1} =$$

$$= \frac{m}{C_n^{i-1}(n-i+1)} \sum_{j=0}^{i-1} C_m^j C_{n-m}^{i-1-j} - \frac{m}{C_n^{i-1}(n-i+1)} \sum_{j=0}^{i-2} C_{m-1}^{j-1} C_{n-1-(m-1)}^{i-2-(j-1)}$$

Бұрынырақта (І-тарау, 3-параграф, 3-пункт) дәлелденген мына

$$\sum_{l=0}^{k} C_m^l C_{n-m}^{k-l} = C_n^k$$

қатынасты ескерсек, онда

$$P(A_i) = \frac{m}{C_n^{i-1}(n-i+1)} \left[C_n^{i-1} - C_{n-1}^{i-2} \right] =$$

$$= \frac{m}{n-i+1} - \frac{m(i-1)}{n(n-i+1)} = \frac{mn - m(i-1)}{n(n-i+1)} = \frac{m}{n}$$

яғни

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = \frac{m}{n}$$

Бұдан мынадай қорытындыға келеміз: берілген есеп шартында студенттің емтиханды сәтті тапсыру ықтималдығы оның емтиханға қашан (ең алдымен, орта шенінде, ең соңында,т.с.с.) кіруіне байланыссыз, өзгермейді және де ол $\frac{m}{n}$ тең, мұндағы n-барлық билеттер (сұрақтар) саны, ал m-студент дайындалып үлгерген билеттер саны. Басқаша айтқанда *студенттің емтиханды сәтті тапсыруы тек қана оның емтиханға дайындығына байланысты* екен.

Байес формулалары.

Тұжырым. Айталық A және $H_1, H_2, \ldots$ оқиғалары алдыңғы 3.1. пункттегі тұжырымда келтірілген шарттарды қанағаттандыратын оқиғалар болсын. Онда егер қосымша $\mathrm{P}(A) > 0$ болса $i = 1,2,\ldots$ үшін мына *Байес формулалары* деп аталатын формулалар дұрыс

$$\mathrm{P}(H_i / A) = \frac{\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A / H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(H_j)\mathrm{P}(A / H_j)} \qquad (10)$$

Дәлелдеу. Бұл формуланың дәлелдеуі мынадан шығады. Шартты ықтималдықтың формуласы бойынша

$$\mathrm{P}(H_i / A) = \frac{\mathrm{P}(H_i A)}{\mathrm{P}(A)}$$

Ықтималдықтарды көбейту формуласы бойынша $\mathrm{P}(H_i A) = \mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A / H_i)$, ал толық ықтималдықтар формуласы бойынша $\mathrm{P}(A)$ (10) формуланың бөліміндегі шамаға тең. ♦

Байес формулаларын іс жүзінде қолдану схемасы мынандай: Айталық, A оқиғасы әртүрлі жағдайларда іске асуы мүмкін болсын және олардың (жағдайлардың) сипаттамаларына байланысты $H_1, H_2, \ldots$ болжамдарын (гипотезаларын) жасай алатын болалық. Қандай да бір себептермен бізге бұл гипотезалардың сынаққа дейінгі ықтималдықтары $\mathrm{P}(H_i)$ белгілі болсын, сонымен бірге H_i гипотезасы іске асқан жағдайдағы оқиғаның пайда болу ықтималдығы $\mathrm{P}(A / H_i)$ белгілі болсын. Тәжірибе жүргізілген және нәтижесінде A пайда болған болсын делік. Алынған қосымша ақпарат (информация) бізге H_i гипотезаларына деген көзқарасымызды өзгертуге, яғни олардың ықтималдықтары $\mathrm{P}(H_i)$-ді қайта баЄалау қажеттігіне әкеп соғады. Байес формулалары осы сұраққа жауапты сандық түрде жазуға мЇмкіндік береді. Әдетте $\mathrm{P}(H_i)$ ықтималдықтары гипотезалардың *априорлы (тәжірибеге дейінгі) ықтималдықтары*, ал $\mathrm{P}(H_i / A)$ *апостериорлы (тәжірибеден кейінгі) ықтималдықтары* деп аталады.

Мысалдар.

5). Қандай да бір бұйым шығаратын заводта A, B, C машиналарында жасалған бұйымдар барлық бұйымдардың сәйкес $25, 35, 45\%$ үлесін құрайды. Олар жасаған бұйымдардың ақаулылары сәйкес $5, 4$ және 2%. Завод бұйымдарының ішінен кездейсоқ алынған бұйым ақаулы болып шықты. Осы бұйым $A\ (B, C)$ машинасында жасалған бұйым болу ықтималдығы неге тең?

Шешуі. D-арқылы алынған бұйым ақаулы бұйым болып шықты деген оқиғаны белгілелік. Онда толық ықтималдықтар формуласы бойынша

$$P(D) = P(A)P(D / A) + P(B)P(D / B) + P(C)P(D / C) =$$
$$= 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,45 \cdot 0,02 = 0,0355$$

мұндағы A, B, C-алынған бұйым сәйкес A, B, C заводтарында жасалған бұйым дегенді білдіретін оқиғалар.

Бұдан Байес формуласы бойынша

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0{,}0125}{0{,}0355} = \frac{25}{71}$$

$$P(B/D) = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0{,}014}{0{,}0355} = \frac{28}{71}$$

$$P(C/D) = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0{,}009}{0{,}0355} = \frac{18}{71}$$

6) Құтыда екі, “герб” тЇсу ықтималдығы $\frac{1}{2}$ болатын симметриялы тиын және “герб” түсу ықтималдығы $\frac{1}{3}$ болатын симметриялы емес тиын бар. Осы тиындардың біреуі кездейсоқ тЇрде таңдап алынған да оны бір рет лақтырған кезде “герб” түскен. Лақтырылған тиынның симметриялы тиын болу ықтималдығы неге тең? Симметриялы емес болу ықтималдығы неге тең?

Шешуі. A-арқылы пайда болған оқиғаны (тиынды бір рет лақтырған кезде “герб” түскенін) белгілелік. H_1 және H_2 арқылы сәйкес симметриялы және симметриялы емес тиын таңдап алынғанын білдіретін оқиғаларды белгілелік. Онда

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A/H_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A/H_2) = \frac{1}{3}$$

болғандықтан толық ықтималдықтар формуласы бойынша

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Ендеше Байес формуласы бойынша лақтырған тиынның симметриялы болу ықтималдығы

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A_1)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}$$

Лақтырылған тиынның симметриялы емес болу ықтималдығы

$$P(H_2/A) = \frac{1/6}{5/12} = \frac{2}{5}$$